Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern

Von Gerhart Lüders

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **13 a**, 254—260 [1958]; eingegangen am 7. Januar 1958)

The problem of commutation relations between different fields is analysed on the basis of the postulate that local interaction Hamiltonians lead to local field equations. It is shown that besides the normal case (anticommutativity of different Fermi fields, commutativity of all other fields), there can be other solutions. All these solutions are generated from the normal case by a sequence of transformations of field operators, of a type first studied by Klein. The TCP theorem holds in all these cases if it holds in the normal case.

Der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik (im engeren Sinn) ist wohlbekannt: Felder, die Teilchen ganzzahligen Spins zugeordnet sind, sind nach der Bose-Statistik, also mit Minusvertauschungsrelationen, zu quanteln, während Felder halbganzen Spins der Fermi-Statistik gehorchen und mit Plusvertauschungsrelationen zu quantisieren sind. Das wurde von Pauli [1] für wechselwirkungsfreie Felder gezeigt und konnte kürzlich auch in Gegenwart von Wechselwirkung als richtig erwiesen werden [2]. Über Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern (man könnte vom Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im weiteren Sinn sprechen) ist hingegen wenig bekannt; nur spezielle Fälle wurden in der Literatur untersucht [3].

Der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im engeren wie im weiteren Sinn spielt eine Rolle beim Beweis des TCP-Theorems [4], das Zeitumkehr, räumliche Spiegelung und Ladungskonjugation miteinander verknüpft. Sowohl ältere Beweise als auch die neuere Analyse durch Jost [5] setzen neben einigen anderen Postulaten den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik voraus; insbesondere wird dabei der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im weiteren Sinn folgendermaßen formuliert:

Zwei Bose-*Felder bzw. ein* Bose- *und ein* Fermi-*Feld kommutieren (in der* Heisenberg-*Darstellung) an raumartig gelegenen Punkten, während zwei* Fermi-*Felder antikommutieren* [6].

Nachdem im Zuge von Untersuchungen über die Grundlegung des TCP-Theorems kürzlich der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im engeren Sinn erneut analysiert wurde [2], soll in der vorliegenden Arbeit der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im weiteren Sinn untersucht werden.

Der Rahmen der Untersuchung ist ziemlich eng gefaßt; es wird nur der Fall lokaler Wechselwirkungen im Hamilton-Operator behandelt. Aus der Forderung lokaler kovarianter Bewegungsgleichungen für die Felder ergeben sich Festlegungen der Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern, die die obige spezielle Festlegung in jedem Fall als mögliche Lösung liefern, in manchen Fällen aber auch andere Lösungen zulassen. Die Mannigfaltigkeit dieser Lösungen und ihr Zusammenhang mit einer in einem speziellen Fall von Klein [7] angegebenen Transformation wird untersucht. Es zeigt sich, daß für jede dieser Lösungen das TCP-Theorem entgegen einer kürzlich erschienenen Behauptung [8] gültig bleibt, sofern es für die genannte spezielle Festlegung der Vertauschungsrelationen richtig ist. Die Annahme lokaler Wechselwirkungen dürfte nach dem gegenwärtigen Stand der Feldtheorie zu eng sein; die Untersuchungen dieses Fal-

[1] W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 [1940].

[2] G. Lüders u. B. Zumino, Phys. Rev., im Erscheinen.

[3] K. Nishijima, Progr. Theor. Phys. **5**, 187 [1950]; S. Oneda u. H. Umezawa, Progr. Theor. Phys. **9**, 685 [1953]; T. Kinoshita, Phys. Rev. **96**, 199 [1954]; R. Spitzer, Phys. Rev. **105**, 1919 [1957]. — All diese Arbeiten handeln nur von Vertauschungsrelationen zwischen Fermi-Feldern, was uns eine zu starke Einschränkung des Problems scheint. Die zweite und dritte Arbeit diskutieren dabei sog. Familien von Fermi-Feldern. Von Herrn Prof. Pauli erfahre ich, daß er das Problem der Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern in einer Vorlesung in Zürich im Sommersemester 1957 behandelt hat.

[4] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 914 [1951]; **91**, 713 [1953]; G. Lüders, Dan. Mat. Fys. Medd. **28**, Nr. 5 [1954] u. Ann. Phys., Lpz. **2**, 1 [1957]; J. S. Bell, Proc. Roy. Soc., Lond. **A 231**, 79 [1955]; W. Pauli in „Niels Bohr and the Development of Physics", McGraw-Hill, New York, and Pergamon Press, London 1955.

[5] R. Jost, Helv. Phys. Acta **30**, 409 [1957].

[6] In Wahrheit wurde früher nur die Antikommutativität von Fermi-Feldern explizit gefordert, während die Kommutativität in den beiden anderen Fällen fälschlich als selbstverständlich vorausgesetzt wurde.

[7] O. Klein, J. Phys. **9**, 1 [1938], speziell Gl. (48).

[8] T. Kinoshita u. A. Sirlin, Phys. Rev. **108**, 844 [1957], Fußn. [22].

les dienen im wesentlichen der Gewinnung von Gesichtspunkten. Es ist bisher keineswegs klar, wie das allgemeine Problem zu formulieren ist.

1. Lokale Wechselwirkungen

Es sei angenommen, daß die betrachtete Feldtheorie durch einen HAMILTON-Operator beschrieben wird, der sich als Summe aus den üblichen wechselwirkungsfreien Operatoren für die einzelnen Felder und aus einem Wechselwirkungsterm schreiben läßt, wobei sich der Wechselwirkungsoperator seinerseits als Raumintegral einer Wechselwirkungsdichte darstellt. Die Wechselwirkungsdichte bestehe aus Summanden, deren jeder ein Produkt von Feldoperatoren und deren Ableitungen an dem betreffenden Raum-Zeit-Punkt darstelle. Wir legen uns die Frage vor, wie die Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern zu wählen sind, damit die mittels

$$\dot{\varphi}(x) = i[H, \varphi(x)] \tag{1}$$

gewonnenen Feldgleichungen lokal sind, d. h. damit die (bei fehlender Wechselwirkung verschwindenden) Quellenterme sich durch Feldoperatoren und ihre Ableitungen am selben Raum-Zeit-Punkt darstellen lassen. Die genauen Forderungen an den HAMILTON-Operator, die zur Kovarianz der entstehenden Feldgleichungen führen, sollen uns hier nicht interessieren.

Für den Augenblick sollen die verschiedenen vorkommenden Felder durch große Buchstaben A, B usw. symbolisiert werden; hermitesch adjungierte Felder gelten dabei nicht als verschieden, sofern die Theorie invariant ist gegenüber einer Eichtransformation, bei der auch das betreffende nicht-hermitesche Feld einen Phasenfaktor aufnimmt (vgl. auch die in Fußn. 2 genannte Arbeit). Ein Summand in der Wechselwirkungsdichte stellt sich dann etwa dar durch

$$A^l B^m C^n \ldots; \tag{2}$$

zwischen Feldoperatoren und ihren Ableitungen ist dabei nicht unterschieden. Ein solcher Summand ist charakterisiert durch einen Satz von Exponenten $(l, m, n, \ldots)$. Lokale Feldgleichungen ergeben sich, soweit dieser Beitrag zur Wechselwirkung in Frage kommt, wenn jeder Feldoperator U an raumartig zum Ort der Wechselwirkungsdichte, jedoch nicht in infinitesimaler Nachbarschaft, gelegenem Punkt mit dem Ausdruck (2) vertauschbar ist. Charakterisiert man die Vertauschungsrelationen zwischen zwei Feldern A, B durch eine Vorzeichenfunktion $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{BA} = \pm 1$, so daß[9]

$$A(x)\, B(x') - \varepsilon_{AB}\, B(x')\, A(x) = 0 \tag{3}$$

$$(x - x' \text{ raumartig}),$$

dann ist die Bedingung für lokale Feldgleichungen, soweit es sich um den Kopplungsterm (2) handelt, gegeben durch

$$(\varepsilon_{UA})^l\, (\varepsilon_{UB})^m\, (\varepsilon_{UC})^n \ldots = 1 \tag{4}$$

für alle U. Man erhält diese Forderung aus folgender Identität

$$\begin{aligned}[U, F G \ldots Z] = {} & (U F - \varepsilon_{UF}\, F U)\, G \ldots Z \\ & + \varepsilon_{UF}\, F (U G - \varepsilon_{UG}\, G U) \ldots Z \\ & \ldots \\ & + (\varepsilon_{UF}\, \varepsilon_{UG} \ldots \varepsilon_{UZ} - 1)\, F G \ldots Z U.\end{aligned} \tag{5}$$

Im Falle mehrerer Wechselwirkungssummanden erhält man mehr als ein Gleichungssystem (4); die verschiedenen Gleichungssysteme sind durch verschiedene Sätze von Exponenten $(l_1, m_1, n_1, \ldots)$, $(l_2, m_2, n_2, \ldots)$ usw. gekennzeichnet. Gefragt ist nach den gemeinsamen Lösungen der Gleichungssysteme.

Die „Diagonalterme" ε_{AA}, ε_{BB} usw. sind nicht aus den Gleichungssystemen zu ermitteln; sie sind bereits aus dem Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im engeren Sinne bekannt

$$\varepsilon_{AA} = \begin{cases} +1 & \text{für BOSE-Felder (Spin ganzzahlig)}, \\ -1 & \text{für FERMI-Felder (Spin halbganz)}. \end{cases} \tag{9}$$

Da die FERMI-Felder in jedem Wechselwirkungsterm in gerader Anzahl vorkommen müssen, ist in jedem Fall eine mögliche Lösung der Gl. (4) gegeben durch

$$\varepsilon_{AB} = \begin{cases} +1 & \text{für zwei BOSE-Felder oder ein BOSE-} \\ & \text{und ein FERMI-Feld}, \\ -1 & \text{für zwei FERMI-Felder}. \end{cases} \tag{7}$$

Diese Lösung, die üblicherweise dem Beweis des TCP-Theorems zugrunde gelegt wird[4, 5] (vgl. Einleitung), soll als „Normalfall" bezeichnet werden. Daneben kann es weitere Lösungen geben. Eine allgemeine Diskussion findet sich im Anhang. Hier sollen zwei Spezialfälle behandelt werden.

[9] Diese Vorzeichenfunktion wurde von KINOSHITA (vgl. Fußn. 3) eingeführt. Auch unsere Gl. (4) tritt im wesentlichen bereits dort auf; sie wird allerdings von einem etwas anderen Gesichtspunkt her gewonnen.

A. Quadrilineare Kopplung von vier FERMI-Feldern, wie sie beispielsweise im Betazerfall auftritt. Der symbolische Ausdruck für die Wechselwirkung ist *ABCD*; die Exponenten sind alle gleich eins. Die Gln. (4) lauten

$$\varepsilon_{UA}\,\varepsilon_{UB}\,\varepsilon_{UC}\,\varepsilon_{UD} = 1 \tag{8}$$

mit $U = A, B, C, D$; nach Gl. (6) ist

$$\varepsilon_{AA} = \varepsilon_{BB} = \varepsilon_{CC} = \varepsilon_{DD} = -1\,. \tag{9}$$

Jedes der vier Felder muß also mit einer ungeraden Anzahl anderer Felder antikommutieren. Man hat drei Typen von Lösungen:

a) Alle vier Felder antikommutieren (Normalfall).

b) Die vier Felder zerfallen in zwei Gruppen von je zwei Feldern, so daß zwei Felder aus derselben Gruppe antikommutieren, solche aus verschiedenen Gruppen kommutieren. Die Gruppen werden in diesem Fall manchmal als „Familien“ bezeichnet.

c) Ein speziell gewähltes Feld antikommutiert mit den drei anderen; diese kommutieren jedoch unter sich.

B. System von ungeladenen und einfach geladenen BOSE- und FERMI-Feldern. Die Kopplungen seien durch einen Ladungserhaltungssatz eingeschränkt, so daß einfach geladene Felder in jedem Kopplungsterm in gerader Anzahl auftreten. Außer dem Normalfall (a) gibt es wenigstens noch folgende Lösung

b) BOSE-Felder kommutieren untereinander, FERMI-Felder *gleicher Ladung* antikommutieren; jedoch kommutieren FERMI-Felder *verschiedener Ladung*, während alle FERMI-Felder mit *geladenen* BOSE-Feldern antikommutieren.

Der Beweis ergibt sich durch sorgfältige Diskussion der Einschränkung in den Kopplungsausdrücken durch die Forderung der Ladungserhaltung und des Auftretens von FERMI-Feldern in gerader Anzahl.

2. Kleintransformationen

Von KLEIN[7] ist eine Transformation angegeben worden, die in speziellen Fällen erlaubt, Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern zu ändern. Damit die KLEIN-Transformation möglich ist, muß die Theorie invariant sein gegenüber der Vorzeichenumkehr zweier Mengen von Feldoperatoren. Es sei also möglich, eine Menge I von Feldoperatoren auszuwählen, so daß Invarianz gegenüber Vorzeichenumkehr der in Menge I enthaltenen Feldoperatoren besteht, d. h. gegenüber der Substitution[10]

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\varphi(x) \text{ sofern } \varphi(x) \text{ in Menge I enthalten,}\\ \varphi'(x) &= \varphi(x) \text{ sofern } \varphi(x) \textit{ nicht} \text{ in Menge I enthalten.} \end{aligned} \tag{10}$$

Ebenso sei es möglich, eine mit Menge I nicht identische Menge II auszuwählen, so daß Invarianz besteht gegenüber

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\varphi(x) \text{ sofern } \varphi(x) \text{ in Menge II enthalten,}\\ \varphi''(x) &= \varphi(x) \text{ sofern } \varphi(x) \textit{ nicht} \text{ in Menge II enthalten.} \end{aligned} \tag{11}$$

Durch Durchschnittbildung erhält man vier Mengen

$\mathfrak{A}$ enthält alle Felder, die *sowohl* in Menge I wie II vorkommen,

$\mathfrak{B}$ enthält alle Felder, die *nur* in Menge I vorkommen,

$\mathfrak{C}$ enthält alle Felder, die *nur* in Menge II vorkommen,

$\mathfrak{D}$ enthält alle Felder, die in *keiner* der beiden Mengen vorkommen.

Einzelne dieser Mengen dürfen leer sein. Die KLEIN-Transformation, die gleich explizit angegeben werden soll, bewirkt, daß die Vertauschungseigenschaften irgend zweier Felder, die in verschiedenen der Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegen, umgekehrt werden (d. h. die zugehörigen Funktionen ε_{UV} wechseln ihr Vorzeichen) während die übrigen Vertauschungsrelationen nicht geändert werden.

Die durch Gl. (10) definierte Substitution werde durch Transformation mit einem Operator[11] Λ erzeugt, d. h.

$$\varphi'(x) = \Lambda\,\varphi(x)\,\Lambda^{-1} \tag{12}$$

[vgl. Gl. (10)]. Der Operator Λ kann unitär und hermitesch gewählt werden

$$\Lambda^2 = 1, \qquad \Lambda = \Lambda^*. \tag{13}$$

Die KLEIN-Transformation ist dann definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi'''(x) &= i\,\varphi(x)\,\Lambda && \text{für Felder aus Menge } \mathfrak{A},\\ \varphi'''(x) &= \varphi(x) && \text{für Felder aus Menge } \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{D},\\ \varphi'''(x) &= \varphi(x)\,\Lambda && \text{für Felder aus Menge } \mathfrak{C}. \end{aligned} \tag{14}$$

[10] Bei Spin > 0 erforderliche Indizes sollen fortgelassen werden, ebenso ein bei nicht-hermiteschen Feldern etwa auftretender Stern.

[11] Die formale Existenz eines solchen Operators soll unkritisch angenommen werden; ebenso sollen die durch Anwendung der SCHURschen Lemmas folgenden Eigenschaften des Operators als gültig angesehen werden.

Das zusätzliche i in der Transformation für Felder der Menge $\mathfrak{A}$ ist eingeführt worden, damit hermitesche Felder hermitesch und Paare hermitesch adjungierter Felder hermitesch adjungiert bleiben. Man überzeugt sich leicht, daß die Vertauschungseigenschaften von Feldoperatoren in den Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in der oben angegebenen Weise abgeändert werden. Wegen Änderung der Vertauschungsrelationen kann die KLEIN-Transformation natürlich nicht durch eine unitäre Transformation erreicht werden. HAMILTON-Operator und Feldgleichungen bleiben lokal, denn wegen der mit Menge II verbundenen Vorzeichenumkehr-Invarianz tritt der Operator $\varLambda$ nur in gerader oder nur in ungerader Zahl auf, so daß er wegen der ersten Gl. (13) insgesamt fortfällt (hierbei auftretende Vorzeichenwechsel im Wechselwirkungsoperator sind gerade von solcher Art, daß die mit der einen Art Vertauschungsrelationen verbundene Symmetrierung des Wechselwirkungsoperators in die mit der anderen Art verbundene übergeht). Klasse II wurde nur eingeführt, um diese Lokalität der Wechselwirkung zu bewahren; besteht man hierauf nicht, so können allgemeinere KLEIN-Transformationen zugelassen werden. Kovariante Feldoperatoren bleiben kovariant, da der Operator $\varLambda$ mit allen eigentlichen LORENTZ-Transformationen vertauschbar ist.

Von KLEIN [7] wurde nicht dieser allgemeine Fall betrachtet. Er untersuchte den Spezialfall zweier nichtrelativistischer Felder φ_1 und φ_2, wobei für jedes dieser Felder Erhaltung der Teilchenzahl gelten soll [12]. Ist N_1 der Operator für die Zahl der Teilchen der Sorte 1, so werde gesetzt

$$\varLambda = \exp(i\,\pi\, N_1)\,. \tag{15}$$

Menge I enthält also das Feld φ_1. Menge II enthalte das Feld φ_2, dessen Operator wegen Erhaltung der Teilchenzahl ebenfalls in gerader Anzahl im HAMILTON-Operator vorkommt. Damit fällt φ_1 in Menge $\mathfrak{B}$ und φ_2 in Menge $\mathfrak{C}$; die anderen beiden Mengen sind leer. Was in diesem Abschnitt als KLEIN-Transformation bezeichnet wird, stellt die natürliche Verallgemeinerung der von KLEIN eingeführten Transformation dar.

Wir betrachten nunmehr die beiden in Abschn. 1 behandelten Beispiele.

A. Quadrilineare Kopplung von vier FERMI-Feldern. Aus dem Normalfall (Lösung a) gewinnt man Lösung b, indem man zwei Felder in Menge I nimmt und Menge II aus allen vier Feldern bestehen läßt; die eine Familie besteht dann aus den Feldern der Menge I, die andere aus denen, die nicht in I enthalten sind. Man erhält Lösung c aus dem Normalfall, indem man Menge I aus zwei Feldern bildet und Menge II ebenfalls aus zwei Feldern, wobei genau ein Feld in beiden Mengen vorkommt.

B. BOSE- und FERMI-Felder mit Ladungserhaltung. Aus dem Normalfall erhält man die angegebene zweite Lösung, indem man Menge I aus allen einfach geladenen Feldern bildet, d. h.

$$\varLambda = \exp(i\,\pi\, Q) \tag{16}$$

setzt, und Menge II aus allen FERMI-Feldern; Q stellt den Ladungsoperator dar, dessen Eigenwert gleich eins sei für einfach geladene Felder.

Durch Nacheinander-Ausführung mehrerer KLEIN-Transformationen erhält man eine Gruppe von Abänderungen der Vertauschungsrelationen, die als KLEIN-Gruppe bezeichnet werden soll, sofern zu ihrer Erzeugung außer der Identität *alle* KLEIN-Transformationen verwendet werden. Im Anhang wird gezeigt, daß die KLEIN-Gruppe alle nach den Kriterien von Abschn. 1 zulässigen Vertauschungsvorzeichen ε_{AB} aus dem Normalfall erzeugt.

3. Zusammenhang mit dem TCP-Theorem

Das TCP-Theorem behauptet die Existenz eines antilinearen Operators [13] Θ mit der Eigenschaft

$$\Theta\,\varphi(x)\;\Theta^{-1} = \varphi^*(-x)\,,\quad \Theta\,\varphi^*(x)\;\Theta^{-1} = \varphi(-x) \qquad \text{für Spin } 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\Theta\,\psi(x)\;\Theta^{-1} = i\,\psi(-x)\,\gamma_5\,\gamma_4\,,\\ &\Theta\,\bar\psi(x)\;\Theta^{-1} = i\,\gamma_4\,\gamma_5\,\bar\psi(-x) \end{aligned}\right\} \quad \text{für Spin } 1/2 \tag{17}$$

und ähnlich für höheren Spin. Diese Formulierung ist in der HEISENBERG-Darstellung gemeint; die Existenz des Operators bedeutet daher die Invarianz

[12] Bei KLEIN handelt es sich um die beiden Spinkomponenten von Elektronen; die Wechselwirkung wird spinunabhängig angenommen. L. ROSENFELD (Nuclear Forces, North Holland Publishing Company, Amsterdam, Interscience Publishers Inc., New York 1948) wandte denselben Formalismus auf die beiden Nukleonensorten (Protonen und Neutronen) an. Die Erhaltung der beiden Teilchenzahlen ist hier durch die Erhaltungssätze für Nukleonenzahl und elektrische Ladung gewährleistet.

[13] Der Begriff des antilinearen Operators scheint auf E. WIGNER (Nachr. Gött. Akad. Mat. Phys. Kl. **1932**, 546) zurückzugehen. Eine neuere Darstellung der Mathematik antilinearer Operatoren findet sich etwa in G. LÜDERS, Ann. Phys., Lpz. **2**, 1 [1957]. Charakteristisch für antilineare Operatoren ist, daß $\Theta\,\lambda = \lambda^*\,\Theta$ für beliebige c-Zahl λ.

der Theorie. In der Wechselwirkungsdarstellung kann Θ stets als Produkt der Operatoren für Zeitumkehr, Ladungskonjugation und Raumspiegelung aufgefaßt werden.

Das Theorem wurde bewiesen[4, 5] unter Annahme des „Normalfalls" Gl. (7) für die Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern und einiger zusätzlicher Postulate. Es soll jetzt gezeigt werden, daß das TCP-Theorem für die durch eine KLEIN-Transformation aus den Feldern des Normalfalles erzeugten Felder richtig bleibt, sofern auf den rechten Seiten der Gl. (17) in einigen Fällen Vorzeichenänderungen vorgenommen werden. Der Gehalt des TCP-Theorems und seine Anwendbarkeit werden durch solche Vorzeichenänderungen nicht beeinflußt. Da alle durch Forderungen lokaler Feldgleichungen nach Abschn. 1 festgelegten Vertauschungsrelationen durch die KLEIN-Gruppe aus den Vertauschungsrelationen des Normalfalles erzeugt werden, bedeutet das, daß das TCP-Theorem gilt für alle nach Abschn. 1 erlaubten Vorzeichenfunktionen ε_{AB}.

Es soll zunächst gezeigt werden, daß der durch Gln. (12), (13) definierte Operator Λ mit Θ kommutiert

$$[\Lambda, \Theta] = 0 . \tag{18}$$

Hierzu werde die Auflösung von Gl. (12) nach $\varphi(x)$, d. h.

$$\varphi(x) = \Lambda^{-1} \varphi'(x) \Lambda \tag{19}$$

in Gl. (17) (für Spin 0) eingesetzt; für Spin >0 verlaufen die Schlüsse ganz analog. Es folgt dann, daß $\Theta^{-1} \Lambda \Theta \Lambda^{-1}$ mit allen Feldoperatoren vertauschbar, also nach dem SCHURschen Lemma ein Vielfaches des Einheitsoperators ist. Um zu zeigen, daß dieser Ausdruck genau gleich eins, daß also Gl. (18) richtig ist, legt man das in der Definition von Λ noch offengebliebene Vorzeichen durch die Forderung[14]

$$\Lambda \Omega = \Omega \tag{20}$$

mit Ω als Zustandsvektor des Vakuums fest. Da andererseits $\Theta \Omega$ bis auf einen bedeutungslosen Phasenfaktor wiederum das Vakuum darstellt, so folgt durch Anwendung von $\Theta^{-1} \Lambda \Theta \Lambda^{-1}$ auf Ω die Gültigkeit von Gl. (18).

Nunmehr werde die Wirkung des Operators Θ auf die bei der Kleintransformation Gl. (14) entstehenden Felder untersucht. Hierzu setzt man die jeweilige Auflösung von Gl. (14) nach $\varphi(x)$ in Gl. (17) (explizit nur für Spin 0) ein und findet unter wesentlicher Benutzung der Antilinearität[13] von Θ, daß

$$\Theta \varphi'''(x) \Theta^{-1} = -\varphi'''^{*}(-x) \quad \text{für Felder aus Menge } \mathfrak{A},$$
$$\Theta \varphi'''(x) \Theta^{-1} = \varphi'''^{*}(-x) \quad \text{für Felder aus den Mengen } \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{D}. \tag{21}$$

Das TCP-Theorem bleibt also gültig, sofern man in die Definitionsgleichungen der Θ-Transformation für Felder der Menge $\mathfrak{A}$ ein zusätzliches Minuszeichen einführt. Unter Beachtung der bei der Definition dieser KLEIN-Transformationen verwendeten Invarianzen gegen Vorzeichen-Umkehren kann man stattdessen auch Vorzeichenänderung in den Definitionsgleichungen für Θ bei Feldern der Menge $\mathfrak{B}$ oder der Menge $\mathfrak{C}$ erreichen. Überhaupt sind ja alle Resultate bezüglich dieser drei Mengen ganz symmetrisch. — Bei Anwendung mehrerer KLEIN-Transformationen nacheinander, also eines allgemeinen Elements der KLEIN-Gruppe, bleibt das TCP-Theorem dann natürlich auch gültig, wenn auch mit einer komplizierteren Verteilung von Minuszeichen in den Definitionsgleichungen.

Die explizite Diskussion der in Abschn. 1 eingeführten Beispiele ist elementar und soll nicht durchgeführt werden. Es sei nur ausdrücklich betont, daß auch Lösung c von Fall A das TCP-Theorem nicht ungültig macht. Man hat nur für eins oder drei der beteiligten Felder die TCP-Operation mit umgekehrtem Vorzeichen zu definieren.

In einer frühen Vorstufe der Untersuchungen war ein Briefwechsel mit Herrn Prof. W. PAULI hilfreich, für den ich ihm auch an dieser Stelle danken möchte. Für kritische Diskussionen bin ich den Herren Prof. W. HEISENBERG und Dr. K. SYMANZIK dankbar.

Anhang

Zur genaueren mathematischen Behandlung der vorliegenden Probleme empfiehlt sich ihre Algebraisierung. Hierbei werde der Primkörper der Charakteristik 2 verwendet, der aus zwei Elementen, 0 und e, besteht, die durch folgende Rechenregeln verknüpft sind[15]

[14] Gl. (20) dient nur der Vereinfachung der Schlußweise; genau genommen reicht es aus, sich zu überzeugen, daß das Vakuum Eigenzustand von Λ ist.

[15] Dieses mathematische Gebilde entsteht aus dem Ring der ganzen Zahlen, indem man alle geraden Zahlen mit dem Element 0 und alle ungeraden Zahlen mit dem Element e identifiziert. Vgl. zu den Begriffsbildungen im übrigen etwa B. L. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra, Bd. 1, 13. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1950.

$$0+0=e+e=0\cdot 0=0\cdot e=e\cdot 0=0\,,\quad 0+e=e+0=e\cdot e=e\,. \tag{A.1}$$

Der Vektorraum $\mathfrak{V}_n$ der Dimensionszahl n über dem Primkörper der Charakteristik 2 wird aufgespannt durch Vektoren, deren jeder ein n-Tupel

$$\boldsymbol{a}=(a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n) \tag{A.2}$$

von Elementen des Körpers darstellt. Die Begriffe der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren gelten ebenso wie die auf ihnen beruhenden mathematischen Sätze unverändert auch für den hier vorliegenden Vektorraum; insbesondere gibt es im n-dimensionalen Vektorraum genau n linear unabhängige Vektoren. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sei erklärt durch

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n} a_i\,b_i\,. \tag{A.3}$$

Das Skalarprodukt kann natürlich nur die Werte 0 und e annehmen; im ersten Fall sollen die beiden Vektoren senkrecht genannt werden.

Der Zusammenhang mit unseren Problemen wird hergestellt, indem wir n gleich der Anzahl verschiedener vorkommender Felder setzen und jedem Feld eine Vektorkomponente [vgl. Gl. (A. 2)] zuordnen. Jeder Summand im Wechselwirkungsoperator wurde in Abschn. 1 durch einen Satz von Exponenten $(l, m, \ldots)$ charakterisiert. Jedem solchen Satz von Exponenten wird jetzt ein Vektor (A. 2) zugeordnet, indem man (in derselben Reihenfolge) jeden geraden Exponenten einschließlich null durch 0 und jeden ungeraden durch e ersetzt. Dieses Verfahren ist genau angemessen, da es in allen Überlegungen nur darauf ankommt, ob ein Exponent gerade oder ungerade ist. Ein so gewonnenes Gebilde sei als Kopplungsvektor bezeichnet. Die Gesamtheit der Kopplungsvektoren spannt den Kopplungsraum $\mathfrak{K}$ auf.

Es werde jetzt danach gefragt, welche andere Lösungen als den Normalfall Gl. (7) das Gleichungssystem besitzt, für das ein typischer Vertreter in Gl. (4) angegeben ist. Bezeichnet man die Lösungen des Normalfalls mit dem oberen Index 0, also $\varepsilon^0{}_{AB}$ usw., und schreibt man die allgemeine Lösung ε_{AB} in der Form

$$\varepsilon_{AB}=\zeta_{AB}\,\varepsilon^0{}_{AB}\,, \tag{A.4}$$

so lautet die Gl. (4) entsprechende Gleichung für die ζ_{AB} folgendermaßen

$$(\zeta_{UA})^l\,(\zeta_{UB})^m\ldots=1\,. \tag{A.5}$$

Die Gleichungssysteme für ζ_{AB} machen keinen Unterschied zwischen BOSE- und FERMI-Feldern; stets gilt

$$\zeta_{AA}=\zeta_{BB}=\ldots=+1\,. \tag{A.6}$$

Einem Lösungssatz ζ_{AB} ordnet man jetzt eine Matrix über dem Primkörper der Charakteristik 2 zu, und zwar ersetzt man, wenn $\zeta_{AB}=+1$, das entsprechende Matrixelement durch 0 und, wenn $\zeta_{AB}=-1$, durch e. Die Matrix ist symmetrisch und die Hauptdiagonalelemente verschwinden wegen Gl. (A. 6). Die Bedingungsgleichungen für die ζ_{AB} bedeuten genau, daß die Zeilenvektoren (oder wegen der Symmetrie auch die Spaltenvektoren) der Matrix auf allen Vektoren des Kopplungsraumes $\mathfrak{K}$ senkrecht stehen. Deutet man eine solche Matrix als lineare Abbildung

$$a_i'=\sum_{k=1}^{n}\zeta_{ik}\,a_k \tag{A.7}$$

oder

$$\boldsymbol{a}'=Z\,\boldsymbol{a}, \tag{A.8}$$

so wird der Teilraum $\mathfrak{K}$ durch sie annihiliert, d. h.

$$\boldsymbol{a}'=0 \text{ für alle } \boldsymbol{a} \text{ aus } \mathfrak{K}\,. \tag{A.9}$$

In der Auffassung als Abbildungen sind die symmetrischen Matrizen mit verschwindender Hauptdiagonale übrigens gekennzeichnet durch

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'=0 \text{ für alle } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \tag{A.10}$$

und

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'=0 \text{ für alle } \boldsymbol{a}. \tag{A.11}$$

Die Frage nach dem Auffinden aller möglichen Vertauschungsvorzeichen läuft hinaus auf die Aufstellung aller linearen Abbildungen (A. 8), für die Gln. (A. 9), (A. 10) und (A. 11) gelten.

Zur Gewinnung von KLEIN-Transformationen (Abschn. 2) müssen Mengen von Feldern aufgesucht werden, gegenüber deren Vorzeichenumkehr die Theorie invariant ist. Jeder solchen Menge werde wiederum ein Vektor in $\mathfrak{V}_n$ zugeordnet, und zwar werde in die betreffende Stelle ein e eingesetzt, wenn das Feld zu der Menge der ihr Vorzeichen umkehrenden Felder gehört; es werde eine 0 eingesetzt, wenn das Feld nicht zu dieser Menge gehört. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein solcher Vektor eine Menge von Feldern kennzeichnet, gegenüber deren Vorzeichenumkehr die Theorie invariant ist, ist offenbar, daß der Vektor auf dem Teilraum $\mathfrak{K}$ senkrecht steht. Die Gesamtheit aller auf $\mathfrak{K}$ senkrechten Vektoren (die wiederum einen linearen Raum bildet) soll mit $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$ bezeichnet werden. Irgend zwei linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$ erzeugen dann eine KLEIN-Transformation: Menge $\mathfrak{A}$ ist gegeben durch diejenigen Felder, die in beiden Vektoren ein e enthalten, Mengen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch diejenigen, die nur in dem einen oder in dem anderen ein e enthalten und Menge $\mathfrak{D}$ schließlich durch diejenigen, die in beiden eine 0 enthalten. Die im Anschluß an Gl. (11) in Worten ausgedrückte Matrix von ζ_{AB} [vgl. Gl. (A. 4)] kann explizit aufgestellt werden. Man überzeugt sich leicht, daß sie, als lineare Abbildung aufgefaßt, gegeben ist durch

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{a})\,. \tag{A.12}$$

Diese Abbildung erfüllt Gln. (A. 9), (A. 10) und (A. 11). Ebenso erfüllen alle Linearkombinationen derartiger Abbildungen, die zusammen mit der Nullabbildung die KLEIN-Gruppe bilden, diese Gleichungen. Es erhebt sich die Frage, ob man auf diese Weise *alle* Transformationen erhält, die diese Gleichungen befriedigen, d. h. ob die KLEIN-Gruppe alle mit dem Postulat lokaler Bewegungsgleichungen verträglichen Vorzeichenänderungen ζ_{AB} enthält.

Die Antwort auf diese Frage ist bejahend. Zum Beweis werden zwei Hilfssätze benötigt.

Hilfssatz 1: Gibt Dim $\mathfrak{R}$ die Dimensionszahl eines Teilraumes $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{V}_n$ an, so gilt [16]

$$\mathrm{Dim}\,\mathfrak{R} + \mathrm{Dim}\,\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = n\,. \qquad \text{(A. 13)}$$

Dieser Hilfssatz ist für die üblichen Vektorräume (d. h. solche über Körpern der Charakteristik null) geläufig; sein Beweis überträgt sich unverändert auf den vorliegenden Vektorraum.

Hilfssatz 2: Ist $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots \boldsymbol{b}_n$ eine beliebige Menge von n linear unabhängigen Vektoren (d. h. eine Basis von $\mathfrak{V}_n$), so schreibt sich die allgemeinste lineare Abbildung, die Gln. (A. 10) und (A. 11) erfüllt, in der Form

$$\boldsymbol{a}' = \sum_{p,q=1}^{n} \beta_{pq}\, \boldsymbol{b}_p\, (\boldsymbol{b}_q \cdot \boldsymbol{a}) \qquad \text{(A. 14)}$$

mit

$$\beta_{pq} = \beta_{qp}\,, \quad \beta_{pp} = 0\;; \qquad \text{(A. 15)}$$

Gl. (A. 9) wird hier nicht gefordert. Beim Beweis dieses Hilfssatzes verwendet man wesentlich den Spezialfall von Hilfssatz 1, daß jeder auf allen Vektoren senkrechte Vektor der Nullvektor ist.

Aus Hilfssatz 1 schließen wir nun zunächst

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{S}(\mathfrak{R})] = \mathfrak{R}\,, \qquad \text{(A. 16)}$$

d. h. der auf $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ senkrechte Teilraum ist mit $\mathfrak{R}$ identisch. Beweis: Einerseits enthält $\mathfrak{S}[\mathfrak{S}(\mathfrak{R})]$ sicher den Teilraum $\mathfrak{R}$; andererseits ist die Dimension beider Teilräume nach Hilfssatz 1 gleich. Nunmehr ist nur noch zu zeigen, daß alle symmetrischen Matrizen mit verschwindender Hauptdiagonale, die jeden auf $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ senkrechten (also in $\mathfrak{R}$ liegenden) Vektor annihilieren, in der KLEIN-Gruppe enthalten sind. Hierzu wählt man die Basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ in Hilfssatz 2 so, daß die ersten, etwa s, Vektoren den Teilraum $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ aufspannen und daß die übrigen Vektoren diese Basis zu einer von $\mathfrak{V}_n$ ergänzen. Damit jeder auf den ersten s Basisvektoren senkrechte Vektor annihiliert wird, dürfen nur diese ersten s Vektoren in Gl. (A. 15) wirklich vorkommen. Ein solcher Ausdruck läßt sich aber sofort als Summe von KLEIN-Transformationen der in Gl. (A. 12) gegebenen Form auffassen.

Man findet mit den bereitgestellten mathematischen Hilfsmitteln übrigens sofort die Ordnung der KLEIN-Gruppe, d. h. die Anzahl verschiedener zulässiger Festlegungen der Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern: mit $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = s$ ist diese Anzahl gegeben durch $2^{s(s-1)/2}$. Denn die KLEIN-Gruppe ist isomorph zur additiven Gruppe der s-reihigen symmetrischen Matrizen mit verschwindender Hauptdiagonale über dem Primkörper der Charakteristik 2; jedem Element der KLEIN-Gruppe ist nach Gl. (A. 14) eine s-reihige Matrix zugeordnet, deren Elemente β_{pq} Gl. (A. 15) gehorchen und außerhalb der Hauptdiagonale nur die beiden Werte 0 und e annehmen können.

Zusatz b. d. Korr.: 1. Herr Prof. ROSENFELD weist mich auf die folgende Arbeit hin, in der ebenfalls das Problem der Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern (vgl. Fußn. 3) behandelt wird: H. UMEZAWA, J. PODOLANSKI u. S. ONEDA, Proc. Phys. Soc., Lond. **A 68**, 503 [1955]. — 2. Die Rolle des Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik im weiteren Sinn beim Beweis des TCP-Theorems wird auch untersucht in einer demnächst erscheinenden Arbeit von KINOSHITA.

[16] Es wäre jedoch ganz verkehrt, hieraus zu folgern, daß $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ zusammen den ganzen Raum aufspannen. Bei geradzahligem n gibt es sogar den Fall, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ (und natürlich $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{R} = n/2$) ist.

Plasma-Konfigurationen mit Oberflächenströmen, die von einem Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten werden

Von R. KIPPENHAHN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **13 a**, 260—267 [1958]; eingegangen am 5. Februar 1958)

Configurations of a plasma with constant pressure and with surface-currents are examined which are in equilibrium with a exterior magnetic potential-field. With the aid of an existence-theorem from the theory of partial differential equations the question of the existence of such configurations is reduced to differential-geometrical properties of the surface of the plasma. These properties are then investigated for the torus of circular cross-section with an interior azimutal magnetic field and for a surface of axial symmetry with variable diameter. Finally a torus of variable cross-section is treated approximately.

Ein Plasma von unendlicher Leitfähigkeit erfülle ein Gebiet $\mathfrak{G}$ des Raumes. In $\mathfrak{G}$ sei ein magnetisches Potentialfeld $\mathfrak{B}_\mathrm{i}$, wobei der Fall $\mathfrak{B}_\mathrm{i} \equiv 0$ nicht ausgeschlossen sein möge, während außerhalb von $\mathfrak{G}$ ein von Null verschiedenes Feld $\mathfrak{B}_\mathrm{a}$ vorhanden sei. Im Innern von $\mathfrak{G}$ soll also kein elektrischer Strom fließen. Wir setzen voraus, daß die Grenzfläche (Oberfläche) $\mathfrak{F}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ nicht von Feldlinien durchsetzt werde, daß also die Fläche $\mathfrak{F}$ durch Feldlinien erzeugt werde. Wir bezeichnen Funktionswerte